Método de líneas para el problema lineal de la onda

Rogel Rojas Bello y José Bottino Cedeño

Departamento de Ciencia y Tecnología
Universidad Nacional Experimental de Guayana
Puerto Ordaz, Venezuela
e-mail:rogeltene@hotmail.com / jbottino@uneg.edu.ve

RESUMEN

Se desarrollan dos tipos de semidiscretizaciones a la variable espacial por el método de líneas al problema lineal de la onda de orden dos. Se usa un código Fortran basado en el método Runge–Kutta Gauss de dos etapas implícitas para resolver la ecuación diferencial ordinaria. Es mostrado un análisis detallado de la utilización de las distintas fórmulas de diferencias finitas de segundo y cuarto orden al problema diferencial parcial. También son presentados algunos e xperimentos numéricos donde se comparan los dos métodos de semidiscretización en el punto final del intervalo de integración.

Palabras claves: Diferencias finitas, Método Runge–Kutta, Problema de la onda.

ABSTRACT

METHOD OF LINES FOR LINEAR WAVE PROBLEM
Two types of semidiscretization are developed for the space variable by the method of lines to second order lineal problem of the wave. A Fortran code is used, based on the Gauss Runge–Kutta formula of two–stage implicit to solve the ordinary diferential equation. A detailed analysis of the formulaes process used for solving the stage values of the Gauss method is displayed. A few numerical experiments comparing the two methods of semidiscretization at end point of the interval integration are also presented.

Keywords: Finite Direrences, Runge–Kutta Methods, Wave Problem.

Artículo recibido el 8 de Diciembre de 2006 y aceptado en su forma final el 02 de Febrero de 2007

I. INTRODUCCIÓN

Cuando se usan técnicas de modelado matemático para describir muchos fenómenos en física, química, biología, ingeniería, economía, ciencias sociales entre otras cosas, surgen las ecuaciones diferenciales parciales; una de éstas es la ecuación de la onda linealizada

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(t) \tag{1.1}$$

Cuando se trata de buscar buenas aproximaciones a las soluciones de (1.1), surgen muchos métodos; uno de estos métodos es el Método de Líneas de Cuadrícula, que consiste en discretizar la variable espacial y la variable temporal por medio de una fórmula de diferencias finitas para las derivadas parciales de orden dos $\partial^2 u / \partial x^2$ y $\partial^2 u / \partial t^2$ (ver [1,2] para más detalles), resultando un sistema lineal. En [1] se muestra que esta forma de discretización puede conducir a pobres soluciones cuando pequeñas variaciones en la variable t producen cambios bruscos en la solución de la ecuación diferencial. Otro enfoque para la solución del problema (1.1) es discretizar sólo la derivada parcial que involucra la variable espacial $\partial^2 u / \partial^2 x^2$ (ver [3,4]), resultando el problema especial de valor inicial de orden dos:

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t)), & t \in [0, T] \\ u(t_0) = u_0, \quad u'(t_0) = u'_0, & u, u' \in \Re^m,\ f \in \Re^{m+1}, \end{cases} \tag{1.2}$$

Que hay que resolver

Es ampliamente conocido que los métodos Runge–Kutta son los más indicados para resolver numéricamente (1.2), pues, estos poseen excelentes propiedades de estabilidad, además alcanzan altos ordenes, véase por ejemplo [6,7,9].

Un método Runge–Kutta resuelve numéricamente el problema (1.2) por medio de las fórmulas de avance:

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n + h^2 \sum_{j=1}^{s} \bar{b}_j\, f(t_n + c_j h, Y_{nj})$$

$$y'_{n+1} = y'_n + h \sum_{j=1}^{s} b_j\, f(t_n + c_j h, Y_{nj})$$

Donde las etapas intermedias Y_{nj} se calculan de las ecuaciones en general no lineales:

$$Y_{nj} = y_n + h c_j y'_n + h^2 \sum_{l=1}^{s} \bar{a}_{jl}\, f(t_n + c_l h, Y_{nl}) \qquad j = 1, \ldots, s,$$

con:

$$\bar{a}_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} a_{kj}, \qquad \bar{b}_j = \sum_{k=1}^{s} b_j a_{ji}, \qquad c_i = \sum_{k=1}^{i} a_{ij}, \qquad \det A \neq 0.$$

II. DESARROLLO

1. El problema de la barra semiempotrada

Consideremos la ecuación diferencial parcial linealizada que describe la vibración de una barra semiempotrada, con las condiciones iniciales de frontera propuestas en [8, 10,11],

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin(t).\cos\left(\dfrac{\pi x}{b}\right) = 0, \quad 0 \le x \le b = 100, \quad t \in [0, 40\pi], \\ u_x(0,t) = u_x(b,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \dfrac{b^2}{4\pi^2 - b^2} \cdot \cos\left(\dfrac{\pi x}{b}\right), \end{cases} \tag{2.1}$$

Con solución teórica:

$$u(x,t) = \frac{b^2}{4\pi^2 - b^2} \cdot \sin(t) \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{b}\right). \tag{2.2}$$

En la Figura 2.1 se puede observar el carácter oscilatorio de la solución exacta (2.2) con t variando de 0 a 4π

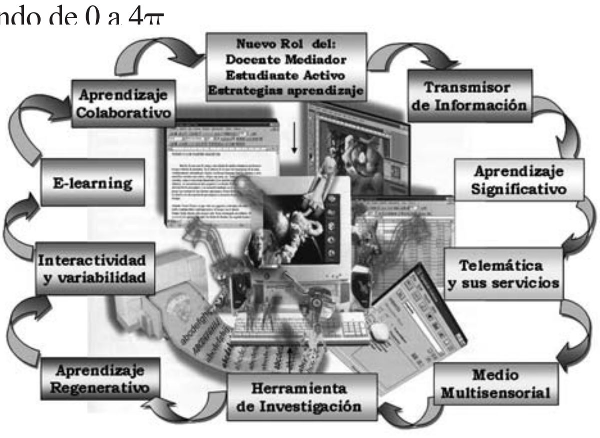

Figura 2.1. Gráfica de la solución exacta del problema de la barra semiempotrada (2.1)

1.1. Semidiscretización de cuarto orden

Discretizando $\partial^2 u / \partial x^2$ usando la fórmula de diferencias simétricas de cuarto orden en los puntos del intervalo

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = \frac{-u_{i-2} + 16u_{i-1} - 30u_i + 16u_{i+1} - u_{i+2}}{12(\Delta x)^2},$$

y en las fronteras, la fórmula de quinto orden

$$\frac{\partial\ u_0}{\partial x} = \frac{-137u_0 + 300u_1 - 300u_2 + 200u_3 - 75u_4 + 12u_5}{60\Delta x},$$

$$\frac{\partial\ u_{N+1}}{\partial x} = \frac{-12u_{N-4} + 75u_{N-3} - 200u_{N-2} + 300u_{N-1} - 300u_N + 137u_{N+1}}{60\Delta x},$$

resulta el sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes de dimensión *N*:

$$\begin{pmatrix} u_1'' \\ u_2'' \\ u_3'' \\ \vdots \\ u_{N-2}'' \\ u_{N-1}'' \\ u_N'' \end{pmatrix} = \frac{4}{(\Delta x)^2} \begin{pmatrix} \frac{553}{1644} & -\frac{652}{411} & \frac{1021}{548} & -\frac{100}{137} & \frac{16}{137} & & & & \\ \frac{473}{411} & -\frac{635}{274} & \frac{166}{137} & -\frac{31}{822} & -\frac{1}{137} & & 0 & & \\ -\frac{1}{12} & \frac{4}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{12} & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -\frac{1}{12} & \frac{4}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{12} \\ & 0 & & -\frac{1}{137} & -\frac{31}{822} & \frac{166}{137} & -\frac{635}{274} & \frac{473}{411} \\ & & & \frac{16}{137} & -\frac{100}{137} & \frac{1021}{548} & -\frac{652}{411} & \frac{553}{1644} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} + \sin(t) \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{1\cdot\Delta x}{b}\cdot\pi\right) \\ \cos\left(\frac{2\cdot\Delta x}{b}\cdot\pi\right) \\ \cos\left(\frac{3\cdot\Delta x}{b}\cdot\pi\right) \\ \vdots \\ \cos\left(\frac{(N-2)\cdot\Delta x}{b}\cdot\pi\right) \\ \cos\left(\frac{(N-1)\cdot\Delta x}{b}\cdot\pi\right) \\ \cos\left(\frac{N\cdot\Delta x}{b}\cdot\pi\right) \end{pmatrix}$$

con

$$\Delta x = \frac{b}{N+1} \tag{2.3}$$

1.2 Semidiscretización de segundo orden

Discretizando $\partial^2 u / \partial x^2$ usando la fórmula de diferencias simétricas de segundo orden en los puntos del intervalo

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{(\Delta x)^2},$$

y en las fronteras, la fórmula de tercer orden

$$\frac{\partial\ u_0}{\partial x} = \frac{-11u_0 + 18u_1 - 9u_2 + 2u_3}{6\Delta x},$$

$$\frac{\partial\ u_{N+1}}{\partial x} = \frac{-2u_{N-2} + 9u_{N-1} - 18u_N + 11u_{N+1}}{6\Delta x},$$

resulta el sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes de dimensión N:

$$\begin{pmatrix} u_1'' \\ u_2'' \\ u_3'' \\ \vdots \\ u_{N-2}'' \\ u_{N-1}'' \\ u_N'' \end{pmatrix} = \frac{4}{(\Delta x)^2} \begin{pmatrix} -\frac{4}{11} & \frac{2}{11} & \frac{2}{11} & & & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & \\ 0 & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & \frac{2}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{4}{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} + \sin(t) \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{1\cdot\Delta x}{b}\cdot\pi\right) \\ \cos\left(\frac{2\cdot\Delta x}{b}\cdot\pi\right) \\ \cos\left(\frac{3\cdot\Delta x}{b}\cdot\pi\right) \\ \vdots \\ \cos\left(\frac{(N-2)\cdot\Delta x}{b}\cdot\pi\right) \\ \cos\left(\frac{(N-1)\cdot\Delta x}{b}\cdot\pi\right) \\ \cos\left(\frac{N\cdot\Delta x}{b}\cdot\pi\right) \end{pmatrix}$$

con

$$\Delta x = \frac{b}{N+1} \tag{2.4}$$

2. Experimentos Numéricos

Para comparar los resultados de los tipos de semidiscretizaciones (2.3) y (2.4) para el problema (2.1), hemos usado un código Fortran denominado *gauss2.tqz* tqz disponible en [5], el cual es basado en un trabajo desarrollado por González y otros en [4] a la resolución de problemas de tipo (1.2). En el mencionado código actualizamos las subrutinas que recogen los datos del sistema diferencial (2.4), ya que el caso del sistema diferencial (2.3) aparece en el código como problema prueba. Las subrutinas actualizadas son:

PRESENTA: Muestra los problemas a integrar.
INICIAL: Da las condiciones iniciales, el intervalo de integración y la dimensión del problema.
JACOBIANO: Se evalúa la matriz jacobiana del sistema diferencial.
DERIVADA: Se evalúa la función derivada f de la ecuación diferencial $y'' = f(t;y(t))$.

Tabla I. Errores globales y estadísticas con el código *gauss2:tqz* para el problema (2.1), en $tfin = 40\pi$. En las tres primeras filas se recogen los resultados del sistema (2.3), y en las últimas tres filas se muestran los resultados del sistema (2.4). $N = 50$ en ambos casos.

Tol	ERR_Y	NSTEP	NLU	NJAC	NFUN	NLS	TIEMPO-CPU
10^{-3}	$2.3\cdot10^{-4}$	129	22	1	922	1060	0.170
10^{-5}	$1.2\cdot10^{-4}$	321	160	1	2435	2794	0.513
10^{-7}	$1.5\cdot10^{-6}$	781	196	1	4847	5628	0.931
10^{-3}	$2.1\cdot10^{-4}$	129	22	1	922	1060	0.169
10^{-5}	$1.4\cdot10^{-4}$	321	160	1	2435	2794	0.492
10^{-7}	$1.6\cdot10^{-5}$	781	196	1	4847	5628	0.904

Tabla II. Errores globales y estadísticas con el código *gauss2:tqz* para el problema (2.1), en *tfin= 40p*. En las tres primeras filas se recogen los resultados del sistema (2.3), y en las últimas tres filas se muestran los resultados del sistema (2.4). $N = 100$ en ambos casos.

Tol	ERR_Y	NSTEP	NLU	NJAC	NFUN	NLS	TIEMPO-CPU
10^{-3}	$3.1 \cdot 10^{-4}$	129	22	1	935	1074	0.581
10^{-5}	$1.2 \cdot 10^{-4}$	321	160	1	2435	2794	1.701
10^{-7}	$7.0 \cdot 10^{-6}$	782	199	1	4865	5646	3.117
10^{-3}	$3.1 \cdot 10^{-4}$	129	22	1	935	1074	0.560
10^{-5}	$1.3 \cdot 10^{-4}$	321	160	1	2435	2794	1.624
10^{-7}	$3.0 \cdot 10^{-5}$	782	199	1	4865	5646	3.027

En las Tablas I y II, TOL es la tolerancia, ERR _Y almacena los errores globales de la componente *u* al final del punto de integración, estos errores son medidos con respecto a la solución exacta (2.2). NSTEP denota el número de pasos que se llevaron a cabo hasta el punto final del intervalo de integración, NLU es el número de factorizaciones reales *LU*, NJAC es el número de matrices Jacobianas llenas calculadas, NFUN representa el número de evaluaciones de funciones *f*, NLS es el número de sistemas triangulares resueltos y TIEMPO–CPU cuenta el tiempo en segundos de CPU implicado en las ejecuciones del código *gauss2.tqz* en un PC Intel–Celeron (1.3 GHz).

Para $N = 50$, en la Tabla I, se puede observar que en ambas semidiscretizaciones las estadísticas: NSTEP, NLU, NJAC, NFUN y NS son iguales. Además para tolerancias bajas y medias los errores tienen un comportamiento similar, aunque la semidiscretización (2.4) tiene un costo computacional (TIEMPO–CPU) ligeramente más bajo.

En la Tabla II con $N = 100$, las estadísticas: NSTEP, NLU, NJAC, NFUN y NS son iguales para ambas semidiscretizaciones, y los errores ERR_Y son muy similares. Luego, recomendamos la semidiscretizacion (2.4) para el problema (2.1) ya que su costo computacional es un poco más bajo que la semidiscretización (2.3).

Comparando los resultados para N = 50 y para N = 100 mostrados en las Tablas I y II respectivamente, podemos observar que para tolerancias bajas y medias los errores ERR_Y son muy parecidos, y para tolerancias altas los errores son ligeramente más pequeños cuando N = 50, además el costo computacional cuando N = 100 es aproximadamente el triple del costo computacional cuando N = 50. Por lo tanto, para el problema lineal (2.1), no recomendamos un número grande de particiones de la variable espacial.

III. REFERENCIAS

1. Ascher U. y Petsold L., *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*, Philadelphia, SIAM, (1998) pp. 3–111.
2. Burden R. y Faires J., *Análisis Numérico*, 6ta Ed., México D. F., Internacional Thomson Editores,(1998), pp. 691–741.
3. Gladwell I. and Thomas R., *Efficiency of Methods for Second–Order Problems*, IMA J. Numer.Anal., 10 (1990), pp. 181–207.
4. González–Pinto S., Peréz–Rodríguez S. and Rojas–Bello R., *Efficient iteration for Gauss methods on second order problems*, J. Comput. Appl. Math., 189 (2006), pp. 80–97.
5. González–Pinto S., Peréz–Rodríguez S. and Rojas–Bello R., *A code based on the two-stage Gauss method for second order problems*, (2005). [En Línea]. Disponible en gauss2, http://www.netlib.org/odc. Octubre 2006.
6. Hairer E., Nørsett S. and Wanner G., *Solving ordinary differential equations I*, 2*nd* Ed., Berlin, Springer, (1993), pp. 132–256.
7. Hairer E. and Wanner G., *Solving ordinary differential equations II*, 2*nd* ed., Berlin, Springer, (1996), pp. 40–100.
8. Houwen V. and Sommeijer B., *Diagonally implicit Runge-Kutta-Nyström methods for oscillating problems*, SIAM J. Numer. Anal., 26 No. 2 (1989), pp. 414–429.
9. Sanz–Serna J. and Calvo M., *Numerical Hamiltonian Problems*, London, Chapman & Hall, (1994), pp. 25–50.
10. Timoshenko S., *Vibrations problems in Engineering*, 2*nd* Ed., New York, Van Nostrand, (1947), pp. 10–70.
11. Tsitouras Ch., *Explicit two–step methods for second–order linear IVPs*, Computers Math. Applic., 43 (2002), pp. 943–949.