¿Es suficiente la formación matemática de pregrado para nuestros docentes de matemática?

Martín Andonegui Zabala / *m_andonegui@hotmail.com*

Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Instituto Pedagógico de Barquisimeto
Barquisimeto, Venezuela

Recibido: 29-03-2016. **Aceptado:** 13-09-2016

Resumen

En la conferencia se parte de la concepción de la Didáctica de la Matemática y de las dimensiones que abarca, y se muestra la necesidad de complementar el enfoque axiomático-formalista desde el que habitualmente se aborda el contenido matemático en la formación de pregrado de nuestros docentes de matemática, con el análisis fenomenológico de los conceptos y estructuras matemáticas, análisis que también incumbe al segmento curricular de la formación "exclusivamente" matemática. De esta complementariedad se derivan conclusiones prácticas aplicables a la formación matemática de dichos docentes y a la revisión y actualización de los currículos de pregrado.

Palabras clave: docentes de matemática, formación matemática, enfoque axiomático-formalista, análisis fenomenológico.

It´s the undergraduate mathematics training sufficient for our mathematics teachers?

The conference starts from the conception of Mathematics Didactics and the dimensions it covers, and shows the need to complement the axiomatic-formalist approach from which the mathematical content is usually addressed in the undergraduate training of our teachers. of mathematics, with the phenomenological analysis of the concepts and mathematical structures, analysis that also concerns the curricular segment of the "exclusively" mathematical formation. From this complementarity, practical conclusions are derived applicable to the mathematical training of said teachers and to the revision and updating of the undergraduate curricula.

Keywords: teachers of mathematics, mathematical training, axiomatic-formalist approach, phenomenological analysis

Abstract

1. Introducción

La suficiencia de la formación matemática de pregrado a la que alude el título, no la entendemos solamente en términos cuantitativos o de extensión –cuál y cuánta matemática deberían aprender en la universidad los futuros docentes de esta especialidad- sino, sobre todo, en términos cualitativos, intensivos o de profundización:

- ¿Esta matemática debe tener algún rasgo o perfil distintivo en comparación con la que necesitan y aprenden otros futuros profesionales, como matemáticos, físicos, estadísticos, ingenieros, administradores, etc.?
- ¿Cómo deberían aprender la que necesitan para poder atender las exigencias del diseño curricular de los niveles escolares primario y secundario; en otras palabras, para que nuestros educandos adquieran la formación matemática deseada y prevista para esos niveles escolares?

Habitualmente y para la casi totalidad de los contenidos disciplinares que se trabajan en el aula de matemática, la pregunta que encabeza estas líneas es respondida por parte de los docentes de forma afirmativa, sobre todo desde la perspectiva cuantitativa. Sin embargo, no siempre se obtiene una respuesta convincente cuando se indaga, por ejemplo, el porqué de la regla de los signos multiplicativos en el conjunto de los números enteros y cómo se debe presentar para que la entiendan los educandos de secundaria, o cuando se pide justificar por qué las operaciones con números racionales se efectúan en ese nivel siguiendo las reglas operativas de las fracciones, siendo así que se trata de dos objetos matemáticos diferentes.

En estos casos y en otros similares, en los que los docentes manifiestan ciertas dudas o dificultades a la hora de responder, suele argumentarse que estas precisiones *no recibidas ni aprendidas* no son incumbencia de alguna de las asignaturas que conforman el segmento de formación estrictamente matemática dentro del currículo de pregrado, sino exclusivas del segmento de formación didáctica del mismo. Con el fin de clarificar esta aparente disyuntiva y llegar a responder a la pregunta que intitula la conferencia, empezaremos por precisar algunos conceptos y términos fundamentales de referencia.

En primer lugar, con la expresión *educación matemática* nos insertamos en el marco general de significado del sustantivo *educación*, entendida ésta como formación del ciudadano para su incorporación y participación en la vida de la sociedad en términos activos, solidarios, críticos y creativos. Desde esta perspectiva, el adjetivo *matemática* califica a la educación en el aspecto de la formación que el ciudadano puede adquirir en el terreno de los conocimientos y competencias propios de esta disciplina, con un doble propósito: por un lado, infundir significado a los fenómenos de la vida social cuya explicación se ilumina mediante el aporte de tales conocimientos y competencias y, por otro lado, utilizar éstos con el fin de impulsar el desarrollo colectivo (Andonegui, 2010b).

Por su parte, la actividad social –acción y efecto– implicada en la educación matemática tiene como soporte y guía rectora la disciplina científica denominada Didáctica de la Matemática (DM), disciplina cuyo objetivo es la educación matemática de las personas y que versa, en general, sobre los fenómenos relativos al aprendizaje y a la enseñanza de la matemática mediante la propuesta de explicaciones y respuestas a las dificultades encontradas en los procesos de aprendizaje y enseñanza de la disciplina en diversos escenarios pero, particularmente, en los que integran un sistema educativo estructurado en diferentes niveles (Chevallard, Bosch, Gascón, 1997).

En resumen, la expresión *educación matemática* viene a designar tanto la actividad práctica regida por la DM como el resultado de tal actividad en los educandos (Andonegui, 2007).

2. Dimensiones de la práctica de la Didáctica de la Matemática

La consideración conjunta del objetivo y del objeto de la DM –la educación matemática de las personas, y los fenómenos relativos al aprendizaje y a la enseñanza de la matemática, respectivamente– nos ha llevado a destacar cinco dimensiones o elementos generales que intervienen en –y componen la práctica de la DM (Andonegui, 2010a):

- Los contenidos matemáticos a aprender;
- Los procesos cognitivos;
- El dominio afectivo;
- Los aspectos socioculturales;
- La dimensión de formación ético-política.

En general, estimamos que cada una de estas dimensiones, así como el conjunto de las relaciones existentes entre todas ellas, deben tomarse en cuenta en cada uno de los momentos didácticos que integran el quehacer docente: la planificación, el desarrollo, y la evaluación, y también a la hora de considerar las estrategias y recursos a utilizar. Y esto para cada conocimiento matemático que se desea construir con los educandos. Ahora bien, la actividad que nos ocupa en este momento nos obliga a obviar esta mirada compleja y a centrarnos en la primera de las dimensiones: los contenidos matemáticos a aprender por parte de los docentes en su formación de pregrado, es decir, la matemática educativa para el nivel universitario.

3. La matemática

Es de consenso común entre los docentes que la didáctica de cualquier contenido matemático parte del análisis del mismo, análisis que se inicia con la ubicación de dicho contenido en el marco global de la disciplina matemática. Lo que nos lleva a hacer algunas reflexiones previas acerca de esta última.

En primer lugar y en razón de su complejidad, debemos aceptar la posibilidad de considerar la Matemática desde una diversidad de perspectivas (Andonegui, 2005), tales como las siguientes:

- *Epistémica*: cuál es la naturaleza del conocimiento matemático, cómo se construyen los objetos matemáticos, cómo se representan, cómo se relacionan entre sí tales objetos, y cómo se valida el conocimiento matemático; es decir, una perspectiva metamatemática.
- *Estructuralista, formal*: la que se centra en el modo de trabajo de los matemáticos y, sobre todo, en la presentación de sus resultados, y que responde a los criterios predominantes en la comunidad matemática profesional en este momento de la historia. Momento que sigue a lo que Javier de Lorenzo (1977) califica como la última ruptura epistemológica en la historia de la matemática, producida en los entornos de 1939 y cuyo manifiesto ubica en el ensayo, escrito por el grupo Bourbaki con el nombre de “La arquitectura de las matemáticas” y publicado en 1948 (Le Lionnais, 1962); ruptura que consagra el enfoque axiomático-estructuralista hoy vigente.
- *Histórico-constructiva*: centrada en descubrir el flujo histórico cultural que posibilita y explica los procesos de construcción de conocimientos matemáticos, así como percibir que en esta aventura humana hay cabida para ensayos y errores, para el ejercicio de la imaginación y de la intuición, para el razonamiento deductivo y para la analogía y la metáfora, para el análisis y para la síntesis. O en palabras de Miguel de Guzmán (1993), “… *se hace obvio cómo la matemática ha procedido de forma muy semejante a las otras ciencias, por aproximaciones sucesivas, por experimentos, por tentativas, unas veces fructuosas, otras estériles, hasta que va alcanzando una forma más madura, aunque siempre perfectible”.*
- *Desde los contenidos de la realidad:* realidad entendida en toda su multiplicidad fenomenológica (Toledo, 2007) que abarca diversos mundos, tales como el de la experiencia diaria, el de la fantasía, el onírico, el del conocimien-

to espontáneo y el de la ciencia, todos ellos con sus experiencias, sistemas de representación y estilos cognoscitivos específicos. Esta perspectiva permite acceder al conocimiento matemático por la vía de estudiar elementos presentes en el entorno humano, tales como la cantidad, la forma, el símbolo y la representación, la dimensión, las relaciones, la determinación y la incertidumbre, la estabilidad y el cambio. (Steen, 1998). Significa la posibilidad de centrarse en la *modelación* y en las *aplicaciones*, de venir de –y de abrirse hacia– las situaciones y los problemas del contexto humano, científico y social.

- *Estética*: contemplar la matemática desde los predios de las regularidades y patrones, de las simetrías y asimetrías, de las generalizaciones y singularidades; desde la perspectiva de la belleza, de la simplicidad, de la elegancia, tanto de sus resultados como de la forma en que se trabaja la propia matemática (Durán, 2001).

Esta diversidad de perspectivas globales referidas a la matemática se complementa con la relativa a las tres fases propuestas por Hilbert por las que pasa cualquier campo o rama de la disciplina y que Javier de Lorenzo resume de este modo:

> Una fase ingenua; una de carácter formal, en la cual se obtiene una perfección en cuanto al cálculo simbólico y al manejo de las reglas de dicho cálculo explícitamente establecidas; y una fase crítica de análisis conceptual, en la que se pone de relieve el porqué del propio establecimiento de las reglas formales. Y es en esta última fase en la cual cobra todo su sentido el método axiomático (Lorenzo, 1998: 118).

En particular, Hilbert confronta los llamados métodos *genético* y *axiomático*. El primero es el que se ha seguido históricamente, por ejemplo, en la construcción del concepto de número, desde la introducción del número natural para contar y, gradualmente, del número negativo como generalidad de la sustracción, del número racional como par de números que garantizan una raíz para cualquier función lineal, y del número real por la vía de sucesiones o cortaduras. El calificativo genético indica que este proceso "i*ntroduce el concepto mucho más general de número real por medio de extensiones sucesivas del concepto más sencillo de número*" (Hilbert, 1993: 17).

La confrontación entre ambos métodos le lleva a la siguiente conclusión: "*A pesar del gran valor pedagógico y heurístico que el método genético pueda tener, el método axiomático resulta claramente preferible para una exposición definitiva y lógicamente segura de los contenidos de nuestro conocimiento"* (Ibíd.: 18). ¿Qué conclusiones podemos sacar de las consideraciones anteriores? Antes que nada, aceptar la necesidad de tomar conciencia acerca de, en primer lugar, la fase en la que se desarrolla o tiene que desarrollarse cada contenido o asignatura matemática del diseño curricular de formación de los docentes de matemática en pregrado; y en segundo lugar, la fase en que se ubica el tratamiento de los correspondientes contenidos en los programas escolares de matemática de los niveles primario y secundario.

Así, en el aprender universitario propio de los futuros docentes de matemática para el nivel secundario, normalmente podremos encontrar la presencia alternada de las fases segunda y tercera y, en particular, los correspondientes procesos genético y axiomático, que sirven de base para la presentación de tal matemática. Pero no podemos olvidar que, por ejemplo, son los conocimientos matemáticos en su fase ingenua los que deben ser abordados y asimilados por los estudiantes de Educación Integral, por cuanto ahí se halla la fundamentación de la matemática básica de la escuela, cuya singularidad radica precisamente en este origen.

Por otro lado, algo análogo ocurre con los conocimientos matemáticos propios del nivel secundario, que adoptan las formas propias de la fase ingenua, en algunos contenidos iníciales, y de la segunda fase, lo que exige un dominio de los procesos genéticos que se hallan presentes en la forma de construir los objetos matemáticos presentes en los programas del liceo.

A estas alturas del discurso no debe ser difícil percibir que esta forma de plantear las cosas sirve para encuadrar la pregunta inicial. ¿Es suficiente el aprendizaje de los contenidos matemáticos en un entorno estricto de la fase crítica vía axiomática, por ejemplo, para los docentes de matemática en formación? Y a partir de ahí, ¿a quién le corresponde enseñarla transición de tales contenidos a un entorno genético? Pensemos, por citar un caso bien conocido, en la dualidad de presentación de los números enteros, por vía axiomática en la universidad, y por vía genética la unión de los números positivos y negativos en el liceo.

En concordancia con lo anterior, otra conclusión ocasional a la que podemos arribar consiste en que al analizar el contenido matemático que debemos abordar en el aula universitaria no podemos obviar la perspectiva *histórico-constructiva* y de *conexión con la realidad* que son inherentes a tal contenido. Aseveración que es válida para los contenidos considerados en cualquiera de sus fases de desarrollo.

Por ejemplo, podemos considerar el inicio histórico del *cálculo infinitesimal* como una respuesta a los problemas históricos referidos a las situaciones de cambio y velocidad de cambio, abordados por Newton y Leibniz (Koestler, 1986; Kasner y Newman, 1987; Stewart, 1998). O, en el caso de la *topología*, como una respuesta a los fenómenos espaciales de *vecindad, interioridad, aproximación y límite* (Tucker y Bailey, 1974; Kasner y Newman, 1987).

4. La matemática desde la perspectiva fenomenológica

Como se sabe, la fenomenología puede definirse como el estudio filosófico de los fenómenos sobre lo que es aparente en las cosas y en las situaciones, consideradas como objeto de la conciencia intencional. Este estudio trata de describir las formas de aparición de los fenómenos y la consecuente atención brindada por la conciencia con el fin de captar su esencia, es decir, la estructura de su significado.

La matemática también puede ser estudiada desde esta perspectiva. Uno de los autores claves de esta tendencia es Hans Freudenthal (1905-1990), al que pueden agregarse los seguidores de la llamada Escuela Realista de Educación Matemática (Freudenthal, 1983, 1991; Gravemeijer, 1994; Puig, 1997; Goffree, 2000; Streefland, 2003). Su tesis básica respecto a la matemática consiste en contemplarla como una *actividad humana* que nos conecta a la realidad, más bien que un sistema deductivo cabalmente organizado o "u*na matemática impresa en los libros y grabada en las mentes" (Freudenthal, 1991: 14).*

Esta consideración de la matemática como una actividad no surge solamente de la observación de cómo se han construido los conocimientos disciplinares a lo largo de la historia, o en el nivel individual de las personas que los han aprendido, siempre mediante la actividad humana. Más bien, Freudenthal (1991) asume de inicio la caracterización que Simon Stevin (1548-1620) hace de la matemática, a la que se refiere con el término en lengua holandesa *Wiskunde, "la ciencia de lo que es cierto, seguro".* Certeza y seguridad que contrasta con la que ofrece el sentido común, que da las cosas por supuestas, basándose en razones que pueden ser acertadas o no. En cambio, la matemática persigue y construye la certeza, fundamentada sólo en buenas razones, y lo hace mejor que cualquier otra ciencia. Para Freudenthal, se trata de una actividad mental muy peculiar y es precisamente "*esta actividad mental, más que su contenido, lo que caracteriza a la matemática como el campo en el que esta actividad puede ejercerse de una manera más adecuada y eficiente"* (Ibíd.: 1s.). En otras palabras, la matemática es la ciencia por excelencia de la actividad mental.

Esta diferenciación entre matemática y sentido común no significa para Freudenthal que ambas vías sean opuestas e irreconciliables. De hecho, menciona temas matemáticos cuyas raíces se hallan en terrenos del sentido común, destacando entre ellos el de los números naturales tal como se plantean en la aritmética euclídea, enfoque persistente hasta mediados del siglo XIX. Y llega a sugerir que:

> En la instrucción podría ser más recomendable comenzar con ideas de sentido común antes que rechazarlas como obsoletas y mejor que suprimirlas. Esta creencia se apoya en cualquier caso en el hecho de un posible desarrollo más o menos espontáneo de la matemática (Ibíd.: 6).

Además, Freudenthal asume que el sentido común puede ir escalando diversos grados. Por ejemplo, habla de la experiencia de la conmutatividad de la suma, enraizada originalmente en el sentido común, que pasa luego a solidificarse en reglas matemáticas, reglas que pasan de nuevo al terreno de un sentido común de un orden superior, como una base para una matemática también de orden superior: "*una jerarquía formidable, construida gracias a una notable interrelación de fuerzas*" (Ibíd.: 9). Lo que de verdad se opone a la actividad matemática es la imposición de conocimientos, ya que lo que ha sido impuesto priva a los educandos de una oportunidad real de desarrollarlo como un conocimiento de sentido común de orden superior, y de continuar el orden jerárquico ascendente al que nos hemos referido.

La consideración de la matemática como actividad humana lleva a Freudenthal (1991) a destacar como una de sus principales características la de la matematización, entendida como un proceso global de organización de dicha actividad, bien sea la que se lleva en el mundo de la vida del sujeto y se expresa en su lenguaje cotidiano, o bien la del profesional matemático que construye y expresa su conocimiento disciplinar. En esta matematización pueden distinguirse dos vertientes, la horizontal y la vertical –la distinción fue propuesta originalmente por Treffers (1987)– caracterizadas así:

- *Horizontal*, consistente en la transformación de un campo de problemas contextuales en un problema matemático, mediante el ejercicio de la observación, de la intuición, de la aproximación empírica y la experimentación inductiva; y
- *Vertical*, que permite la construcción progresiva del conocimiento matemático del sujeto hacia mayores niveles de integración y formalización, mediante el análisis de la propia actividad matemática y la activación de estrategias de abstracción, tales como la reflexión, la simbolización y esquematización, la definición, la generalización, y la prueba.

Freudenthal matiza esta distinción indicando que *"la matematización horizontal procede desde el mundo de la vida hacia el mundo de los símbolos. En el mundo de la vida uno vive, actúa (y sufre); en el otro, los símbolos son formateados, reformados y manipulados de forma mecánica, comprehensiva, reflexiva; esta es la matematización vertical"* (Freudenthal, 1991: 41 ss.). Y agrega: "*A decir verdad, las fronteras entre estos mundos están marcadas más bien vagamente*" (Ibíd.: 42). La distinción entre ellas "*depende de la situación específica, de la persona implicada y de su entorno"* (Ibíd.: 42). En esta ambigüedad se ubican elementos tales como los números naturales, las tablas, los mapas geográficos, las figuras geométricas, etc.

El análisis fenomenológico aplicado hasta ahora a la matemática, se concreta en esta triple percepción de la misma desde la perspectiva de la gente:

- Como fin en sí misma, actividad mental generadora y portadora de certeza y seguridad.
- Como motor indispensable de su propio desarrollo (matematización vertical); y
- Como herramienta indispensable para resolver diversas situaciones planteadas en el mundo de la vida o en el ámbito de otras disciplinas (matematización horizontal, por la vía de la modelación y de la aplicación).

En este punto cabe destacar cómo se relaciona la perspectiva fenomenológica de la matemática con algunas de las que se propusieron con antelación:

epistémica, estructuralista, histórico-constructiva, desde los contenidos de la realidad, y estética. Indudablemente y a la vista de lo expuesto hasta ahora, asume la perspectiva histórico-constructiva y la que contempla la matemática desde los contenidos de la realidad. En cuanto a la perspectiva estructuralista, Freudenthal también se refiere a ella, pero a su modo. Para él, "*estructurar es un medio para organizar fenómenos, físicos y matemáticos, e incluso la matemática como un todo*" (Freudenthal, 1991: 20). En particular, "*en matemática la relación entre forma y contenido se refleja mediante la relación que existe entre poseer o ser una estructura*" (Ibíd.: 20).

Freudenthal revisa algunos tipos de estructuras matemáticas: las algebraicas, las de los sistemas numéricos, las geométricas… Respecto a estas últimas, señala el Programa de Erlangen, propuesto por Félix Klein en 1872, como un intento de estructurar la geometría mediante una cadena de actos de empobrecimiento de las diversas geometrías, caracterizadas cada una de ellas por sus correspondientes propiedades estructuradoras. Así, comienza por la geometría euclídea, de carácter métrico, y pasa a la geometría afín, que solo preserva la rectilinealidad y el paralelismo. Si ahora solo preservamos la rectilinealidad, estamos en los ámbitos de la geometría proyectiva. Finalmente, si también esta última propiedad desaparece, llegamos a la estructura topológica del espacio, que trabaja sobre curvas cerradas y abiertas, interioridades de superficies limitadas, entre otras.

A partir de estos ejemplos particulares aborda la posibilidad de estructurar toda la matemática. Al respecto, trae a colación el proyecto planteado por el grupo Bourbaki, que intenta jerarquizar todo el contenido matemático, partiendo de la idea de conjunto, mediante un proceso de ir dotando los sucesivos contenidos con estructuras cada vez más ricas. Freudenthal es tajante frente a este proyecto u otro similar:

> No existe, y nunca existirá, algo así como la jerarquía de las matemáticas. […] Sin embargo, los usuarios de la matemática deberán abordar las estructuras matemáticas cuando sea menester, e incluso deberán estar atentos a sus aspectos estructurales hasta cierto grado. No obstante, esto no significa que la matemática deba serles presentada como una estructura (Ibíd.: 25).

En particular, Freudenthal rechaza en el proyecto Bourbaki algunos aspectos puntuales, tales como la omisión del sistema de numeración decimal, así como de toda la geometría visual. Pero el argumento fundamental para su crítica radica en que, en primer lugar, no ha intentado "*estructurar la matemática a partir de la realidad como fuente epistemológica y dominio de la matemática aplicada, aun cuando tales intentos son totalmente deseables desde los puntos de vista psicológico, pedagógico, educacional y didáctico*" (Ibíd.: 26). Y en segundo lugar, en que caracterizan el desarrollo conceptual –es decir, el aprendizaje– como la sola adquisición de conceptos, lo que les hace minusvalorar las estructuras pobres. Al respecto, Freudenthal concluye:

> La estructuración de conceptos, más que su mera formación, nos brinda un asidero con la realidad. Y esto lo conseguimos con estructuras ricas o pobres, de acuerdo con nuestras necesidades. Empobrecer puede significar generalización en el sentido de una más extensa aplicabilidad (Ibíd.: 26).

Para finalizar esta parte en la que hemos revisado la relación de la perspectiva fenomenológica con las cinco que se propusieron con antelación, solo agregaremos que, en cuanto a la perspectiva epistémica, la fenomenológica propone que cualquier actividad matemática puntual no solo desarrolla la lógica de construcción de ese conocimiento matemático local, sino que también aporta trazas para comprender la lógica de construcción de la propia matemática como disciplina. Por ejemplo, la resolución de un problema matemático concreto puede convertirse en un factor inductivo para comprender el carácter modelador de la matemática en general.

5. El análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática

Sobre la base de las consideraciones anteriores, Freudenthal (1983, 1991) aborda el *análisis fenomenológico* de un concepto o de una estructura matemática. Este análisis consiste en describir aquellos fenómenos del mundo físico, social y mental para los cuales el concepto, la estructura, o la idea actúan como un medio de organización. Para ello, procede por pasos progresivos; el primero tiene por objetivo construir objetos matemáticos primarios: número, suma, formas geométricas, que sirven para organizar los fenómenos que se hallan en el mundo de la vida, cantidad de situaciones de agregar o reunir, formas de las cosa, objetos que pasan luego a convertirse en fenómenos para otros objetos matemáticos más elaborados, y así sucesivamente, incrementando los niveles de abstracción hasta llegar a objetos matemáticos plenamente formalizados, entre los cuales se encuentran los conceptos matemáticos axiomatizados.

Como resultado de este análisis fenomenológico se obtiene la *fenomenología de un concepto matemático*, que consiste en la descripción de su relación con los fenómenos para cuya organización se creó. Y de ahí se pasa a la *fenomenología didáctica* del concepto, que implica relacionar la descripción anterior con el aprendizaje del estudiante.

En este punto conviene resaltar la diferencia que el enfoque realista establece entre *objetos mentale*s y c*onceptos matemáticos*. Los primeros hacen referencia a lo que se encuentra en la mente de las personas reales, a su campo semántico personal; por ejemplo, en el caso del *número*, a los significados que presenta en las situaciones de uso: secuencia, conteo, orden, identificación, medida de cantidad, situaciones que se refieren al campo del sentido común. Un objeto mental está bien constituido si puede dar cuenta de todos sus usos en todos los contextos, y si puede organizar todos los fenómenos correspondientes. En cambio, los conceptos se refieren a lo que se halla en la disciplina matemática formal.

Así, pues, el objetivo de la acción educativa consiste, ante todo y particularmente en el nivel escolar básico, en construir buenos objetos mentales, enriquecer el campo semántico personal de los educandos; y prepararles o al menos no colocarles obstáculos inamovibles, vía imposición de conocimientos y algoritmos para la posterior adquisición de conceptos matemáticos, adquisición que implica examinar cómo han sido establecidos en la matemática, cómo han sido organizados local o globalmente en un sistema deductivo.

Ciertamente los conceptos son la columna vertebral de nuestras estructuras cognitivas, pero se produce una:

> Inversión antididáctica” (Freudenthal, 1983: x) cuando se trabajan conceptos y no objetos mentales; en palabras del propio autor, “enseñar el concepto de X no es el camino apropiado para enseñar X. […] La meta final de la enseñanza y del aprendizaje son los objetos mentales. Particularmente, aprecio este término porque puede extrapolarse al término que describe cómo son manejados estos términos, exactamente por operaciones mentales”(Freudenthal, 1991: 19).

Freudenthal acota que la distancia entre un objeto mental y el correspondiente concepto depende del contenido matemático en cuestión y, quizá más, de la particular situación de cada individuo. La cuestión está en saber cómo un objeto mental se desarrolla hasta convertirse en un concepto. Los síntomas pueden ser diversos; por ejemplo, en el caso del número natural, puede ser el desprenderse de la camisa de fuerza que impone el sistema posicional. Pero habitualmente, la formación del concepto viene desvelada por los procesos de *formalización* y su correspondiente *verbalización* por parte del sujeto.

En definitiva, conceptos y objetos mentales están en permanente diálogo, lo que posibilita el auténtico aprendizaje matemático. Los primeros no sustituyen a los segundos, sino que contribuyen a la formación de nuevos objetos mentales que los contienen o con los que son compatibles. Por otro lado, los constituyentes de un objeto mental bueno se determinan gracias al análisis fenomenológico del concepto correspondiente.

A partir de las consideraciones anteriores, particularmente de contemplar la matemática como una actividad humana que nos conecta con la realidad, se deriva inmediatamente que debe dárseles a los estudiantes la oportunidad de reinventar la matemática en un proceso de interacción, es decir, en un proceso de *reinvención guiada*. También queda clara la relación que adoptan el aprendizaje y la enseñanza de la matemática: el aprendizaje es central y de sus características se deriva el ser de la enseñanza.

Los principios claves que orientan el aprendizaje se refieren, en primer lugar, a su *significatividad*: los educandos, particularmente los niños, deben construir los objetos matemáticos, pero esto sólo es posible si captan su significado, acción que depende del carácter asequible con que se les presente tal objeto. Por consiguiente, la actividad, el contacto con el mundo de la vida de los sujetos, debe figurar como punto de partida del aprendizaje y también como punto de llegada, vía modelación y aplicación llenas de sentido.

Como segundo principio se establece que la *reflexión* sobre producciones propias, conflictos y obstáculos, es el motor que genera el progreso, particularmente el paso de las matemáticas informales a las formales. Un tercer principio a tomar en cuenta es el de la *estructuración progresiva del saber matemático*, con el fin de que los estudiantes interioricen ambos procesos de matematización, horizontal y vertical. Y como cuarto principio, envolvente de todos los anteriores, la *consideración del contexto social* y de las interacciones derivadas de la presencia de otros actores; es decir, aprender en una clase considerada como una comunidad matemática.

En definitiva, la perspectiva realista de la educación matemática nos ofrece una visión epistemológica de la matemática y, en particular, ratifica la presencia de un proceso temporal en la construcción y en la adquisición del conocimiento matemático. También nos da una explicación funcional del progreso que deben experimentar los educandos en su camino de reinvención matemática guiada.

A este respecto, en un primer paso o nivel del desarrollo de este proceso, hay objetos mentales considerados como antecedentes de conceptos matemáticos que organizan fenómenos presentes en el mundo de la vida. Por ejemplo, el número natural, con respecto a fenómenos como contar u ordenar sin perder de vista que este objeto mental puede, a su vez, convertirse en fenómeno que es organizado por otro nuevo objeto matemático, como puede serlo el concepto abstracto y axiomático de número natural.

6. La formación matemática de los futuros docentes de la disciplina

Culminada esta revisión, necesariamente resumida de la perspectiva fenomenológica de la matemática propuesta por Freudenthal, y basándonos especialmente en el proceso de análisis fenomenológico de los conceptos, vamos a intentar responder a la pregunta que formulamos como título inicial. Para ello y después de resaltar algunos elementos clave de análisis, pasaremos a examinar algunos temas de los programas de asignaturas matemáticas del diseño curricular de pregrado que rige la formación de los futuros docentes de la especialidad. Así, comenzamos por destacar la pertinencia de:

- Establecer la fenomenología de cada tema matemático a estudiar. Esto implica ubicarlo, desde el inicio, en la fase de desarrollo (ingenua, operativa-formal, o crítica-axiomática) en la que el tema se presenta. En un paso siguiente y como resultado del análisis fenomenológico, deben emerger los antecedentes fenomenológicos del tema.
- Analizar el tratamiento correspondiente del tema en los programas de matemática de los niveles escolares primario o secundario, según sea el caso. Aquí también hay que empe-

zar por precisar la fase de desarrollo en la que el tema se presenta.

- Considerar en la enseñanza del tema en el nivel universitario las implicaciones matemáticas que impone el punto anterior.

6.1. El contenido de los números enteros

Habitualmente, el conjunto Z de los números enteros se construye y define axiomáticamente en el nivel universitario como conjunto de clases de equivalencia formadas por pares ordenados de números naturales (a, b) que verifican la relación de equivalencia R: $(a, b)\ R\ (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$; los positivos son aquellos en los que $a>b$; los negativos, aquellos en los que $a<b$; y el 0, la clase de pares en los que $a = b$.

En el mismo orden de ideas, la suma y la multiplicación de enteros también se definen axiomáticamente. Así, para el caso de la multiplicación: $(a, b) \times (c, d) = (a \times c + b \times d, a \times d + b \times c)$; por ejemplo, (1, 3) x (2, 5) = (2 + 15, 5 + 6) = (17, 11); en términos habituales: (-2) x (-3) = 6. De la consideración de los posibles resultados se ha deducido lo que se conoce como la *regla de los signos*: el producto de dos números enteros del mismo signo es positivo, y negativo si poseen signos opuestos. Está claro, pues, que el método axiomático proporciona una explicación que permite comprender el porqué de esta regla, eso sí, bajo el supuesto de que el sujeto disponga de la capacidad previa para entender la formalidad de la axiomatización como mecanismo de construcción de conceptos matemáticos [Más adelante abordaremos otra vía de construcción de Z, propuesta por Hankel, vía que también se ubica en la fase crítica].

No es difícil apreciar que esta no puede ser la manera de abordar el estudio de los números enteros en el nivel escolar secundario; por ello, tendremos que acudir al método genético. En este punto, nos apoyamos en el hecho histórico ampliamente documentado, de la aparición de ecuaciones cuya resolución llevaba a soluciones que no eran números naturales, es decir, cuyos procesos de resolución desembocaban en ecuaciones del tipo $x + m = n$, con $n, m \in$ N, $n<m$, lo que privaba de sentido en N a la resta $n - m$.

Esto explica la perspectiva genética señalada por Hilbert, que considera Z como el resultado de ampliar N "*mediante la introducción de la negación"* (Lorenzo, 1998: 119), es decir, mediante la construcción de números negativos abstractos –en el sentido de desligados de referencias concretas, provenientes, por tanto, del propio mundo de la matemática. ¿Y dónde nos pueden aparecer estos nuevos números negativos? En la ampliación de situaciones que involucren la operación aritmética de la sustracción.

Así, dados dos números naturales n y m, y la relación (ecuación) $x + m = n$, podemos establecer tres tipos de situaciones –excluyentes entre sí– para x, de acuerdo con las correspondientes situaciones de sustracción entre m y n:

- Si $n > m$, entonces x se llama entero positivo, su valor es el de la resta $n - m$, se representa como (+x), y el conjunto de todos los enteros positivos se denota como Z+
- Si $n = m$, entonces x se llama cero y se denota con el símbolo 0
- Si $n < m$, entonces x se llama entero negativo, su valor es el opuesto del de la resta $m - n$, se representa como $(-x)$, y el conjunto de todos los enteros negativos se denota como Z–.

Hay que hacer notar que los signos + y – que acompañan a x en los casos de enteros positivos y negativos, respectivamente, no deben entenderse como signos de las operaciones de adición y sustracción, sino como elementos integrantes de cada tipo de número entero; y que, en todo caso y si no se presta a confusión, se permite la omisión del signo + en los positivos.

Tomando en cuenta lo expresado, tenemos entonces que el conjunto de los números enteros se puede definir como: Z = Z– {0} Z +. Dada esta definición formal de Z, procedemos a *representar* el conjunto, bien sea por extensión o bien gráficamente, sobre la recta numérica. Aquí convendría hacer ver que como los enteros $+x$ y $-x$ son simétricos con respecto al 0 –situación que permite introducir el concepto de valor absoluto de un número entero–, puede considerarse a $-x$ como el "opuesto" de $+x$, y viceversa. Por otro lado, el orden en Z puede establecerse de una manera sencilla en referencia a la representación gráfica del conjunto: un número entero es menor que otro, si está colocado a la izquierda de este último; y es mayor, cuando está a su derecha. Las dificultades con la comprensión de Z aparecen cuando se trata de su aritmética aditiva y multiplicativa, puesto que entran en juego números negativos.

Una primera mirada histórica hacia este tipo de números señala que sus orígenes se remontan a algunas civilizaciones orientales en las que se utilizaban en el ámbito de las operaciones comerciales para anotar y diferenciar cantidades de ganancias y de pérdidas. Incluso se tiene evidencia de reglas aritméticas que dan pautas para operar con ellos, como las escritas por el matemático hindú Brahmagupta en el siglo VII.

Un análisis fenomenológico de estos números nos obliga, en primer lugar, a explicar el sentido del calificativo *negativos* que poseen –antes de hablar de Z. Para ello recurrimos a la propiedad de los números naturales, la de ser *números-medida*; este recurso nos obliga a revisar exhaustivamente los posibles resultados de una medición. Y así observamos que, de hecho, hay magnitudes cuya medida no termina de expresarse por el solo valor absoluto de cantidad con respecto a una unidad de la misma naturaleza, o de posición de orden en un conteo secuencial, sino que, además, requieren de una indicación de referencia, un *sentido de dirección dual* arriba/abajo, antes/después, positivo/negativo, con respecto a un valor convencional considerado como "*origen*" de las medidas. Estas magnitudes, así medidas, pueden calificarse como direccionables, y se encuentran en el mundo real: una temperatura, una posición, un balance financiero, una ubicación temporal, un desplazamiento.

Con estas precisiones queremos destacar que el calificativo de *negativos* que se endosa a este tipo de números, calificativo que se ha extendido como referencia habitual a los mismos, no parece el más apropiado. A la vista de que tales números surgen al medir magnitudes direccionables, referidas a un origen convencional, parece más adecuado calificar dichos números como *relativos*, es decir, como expresión de esa *relación* de posición con respecto a ese origen convencional, como se hace en otros ámbitos lingüísticos y culturales.

González Marí (1995, 2009) va más allá al extender ese calificativo a los números naturales, cuando, al medir cantidades discretas, conjetura acerca de la existencia de un conjunto de *números naturales relativos* (NR), que incluye positivos y negativos en el sentido de direccionalidad, de relación con respecto a ese origen convencional, razón por la cual hay que entender que el signo menos que acompaña a estos números negativos no es un signo intrínseco al propio número sino un indicador de su posición con respecto a tal origen.

Entre las diferencias que presentan tales números con respecto a los números naturales y enteros, González Marí (1995) señala que están dotados de una estructura de orden diferente a las de N y Z. Así, en el conjunto de los *positivos*, son mayores los de mayor valor absoluto, e igualmente y por su cuenta en el conjunto de los *negativos*. En otras palabras, sobre la recta numérica, los positivos se ordenan hacia la *derecha*, y los negativos hacia la *izquierda*. Por ejemplo, si se trata de la situación de ganancias/pérdidas, las pérdidas crecen hacia la izquierda: son mayores cuanto más negativas son, y se ubican más a la izquierda; y las ganancias crecen hacia la derecha: son mayores cuanto más *positivas* son, y se ubican más a la derecha. El autor, incluso, considera que hay dos *ceros*, origen de cada una de las dos ramas: el 0 *pérdidas* y el 0 ganancias que no son reductibles uno al otro; en efecto, puede hablarse de una ganancia nula, sin que eso signifique una pérdida también nula. De modo análogo, no es posible establecer cierto tipo de comparaciones entre números de ramas diferentes; por ejemplo, si se dan los valores de *100 de pérdida* y *50 de ganancia*, ¿cuál de las dos cantidades es *mayor*? –lo que no impide el establecimiento de una aritmética aditiva entre números de ambas ramas.

Como vemos, los *números negativos habituales* en la historia y en los ejemplos que aparecen en los libros de texto escolares, encajan perfectamente como *números naturales relativos,* tanto considerados de una manera *estática* –saldos comerciales positivos y negativos, temperaturas sobre y bajo cero, ubicaciones a derecha e izquierda, arriba y abajo, delante o detrás, cantidades de tiempo antes y después de determinado momento, así como de una manera *dinámica* –ganancias y pérdidas, ascensos y descensos de temperatura, movimientos hacia la derecha e izquierda, hacia arriba y abajo, hacia adelante y atrás, traslaciones en el tiempo hacia el futuro y hacia el pasado, entre otras.

A todo esto surge una pregunta: Si estos *números negativos resultados de medidas* de los que venimos hablando pueden ser considerados como *números naturales relativos*, ¿qué papel juegan cuando vamos a introducirnos en el estudio de Z? Y la respuesta es posible desde el enfoque fenomenológico: Sí podemos y debemos hablar de tales números direccionados (positivos y negativos), siempre y cuando estemos conscientes de que *no hablamos todavía de números enteros positivos y negativos de Z*, sino de números naturales relativos que pueden considerarse como fuente o antecedente fenomenológico de Z en el proceso de matematización vertical. Y en este ámbito, no sólo tienen cabida tales números con sus significados estático y dinámico, sino también la aritmética que se puede construir con ellos, siempre que tenga sentido, es decir, siempre que sea posible explicar su significado.

A este respecto y recogiendo una de las preguntas iníciales, afrontemos el caso de la multiplicación de dos números negativos. Aquí aportamos el testimonio de Glaeser (1981) acerca de la imposibilidad de descubrir en el mundo de la vida, de manera generalizada, fenómenos que *presten* significado a esta posible operación. Sin embargo, el propio Glaeser recoge algunos ejemplos, algunos tomados de la historia de los números negativos, que dejan entrever que, para situaciones muy particulares, es posible vislumbrar ese significado para la multiplicación de dos números negativos.

Uno de ellos es el siguiente (Glaeser, 1981): Supongamos que los carros pueden circular por una autopista a una velocidad prácticamente constante. Suponemos también que distinguimos dos sentidos en la autopista: positivo hacia nuestra derecha y negativo hacia nuestra izquierda. Ubicados en un puesto fijo (el punto 0), observamos un carro que pasa frente a nosotros y queremos saber dónde se encontraba en un instante de tiempo anterior y dónde se encontrará en otro instante posterior, lo que implica también la consideración de tiempos negativos (los anteriores) y positivos (los posteriores).

Como las posiciones inicial y final, con referencia al punto de observación, se obtienen mediante la multiplicación de la velocidad (magnitud también afectada por la direccionalidad: positiva si el desplazamiento es de izquierda a derecha, y negativa si es en sentido inverso) por el tiempo correspondiente, se nos presentan cuatro situaciones posibles (nos referiremos a la situación concreta de una velocidad constante de 90 km/h y un lapso de tiempo de 2 horas):

Tabla 1.
Demostración de situaciones posibles

Sentido del desplaza-miento	Posición respecto al punto de observación	
	2 horas antes	2 horas después
izquierda → derecha	90km/h x (-2) h = -180km => 180km a la izquierda	90km/h x 2 h = 180km => 180 km a la dere-cha
derecha → izquierda	(-90)km/h x (-2) h = 180km => 180 km a la derecha	(-90) km/h x 2 h = -180km => 180km a la izqui-erda

Podemos observar la presencia completa de la regla de los signos: el producto de dos cantidades de igual signo es positivo, y negativo en caso de signos opuestos. En particular, si el carro circula de derecha a izquierda (velocidad relativa negativa), 2 horas antes (tiempo relativo negativo) de pasar por el punto de control se encuentra en una posición positiva (a la derecha de tal punto), producto de la multiplicación de los dos valores relativos negativos.

Ahora vamos a referirnos a la vía de construcción de Z propuesta por Hermann Hankel (1839-1873). En su estudio de los números complejos (1867) aborda la multiplicación de dos números negativos mediante la demostración del siguiente teorema: *"La única multiplicación en R que puede ser considerada como una extensión de la multiplicación usual en R⁺ respetando la ley de la distributividad a la izquierda y a la derecha, es la que se ajusta a la regla de los signos*". El planteamiento se desarrolla así (Glaeser, 1981; Henley, 1999):

Sean a y b dos números, y $(-a)$ y $(-b)$ sus opuestos respectivos. Se cumple:

$a + (-a) = 0$, $b + (-b) = 0$
$a \times 0 = 0$, $b \times 0 = 0$

A partir de estas igualdades básicas, y aceptada la propiedad distributiva, se sigue:

$$0 = a \times 0 = a \times [b + (-b)] = a \times b + a \times (-b) \quad \textbf{[A]}$$
$$0 = 0 \times (-b) = [a + (-a)] \times (-b) = a \times (-b) + (-a) \times (-b) \quad \textbf{[B]}$$

De la igualdad de [A] y [B] (ambos son 0), se sigue:

$$a \times b + a \times (-b) = a \times (-b) + (-a) \times (-b)$$

Y, por eliminación del sumando común en ambos miembros, se llega a:

$$(-a) \times (-b) = a \times b$$

Se puede concluir que, emulando la proposición de Hankel para la extensión de R+ a R, la única multiplicación en Z que prolonga la multiplicación usual en N con la condición de respetar la propiedad distributiva, es la que se ajusta a la regla de los signos. Como se puede apreciar, Hankel aplica el *principio de permanencia de las leyes formales* que, para el caso de la multiplicación de dos factores enteros negativos, requiere aceptar que también se conserva la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma y a la resta.

En resumen, podemos señalar a N como antecedente fenomenológico para NR; y a los conjuntos N y NR como antecedentes fenomenológicos para Z: el conjunto N, como referencia para aplicar el principio de permanencia de las leyes formales y extenderlas a Z; y el conjunto NR, que aporta la referencia a cantidades discretas negativas y a la aritmética y a la resolución de problemas que le es propia.

Desde esta perspectiva, la enseñanza de los números enteros en secundaria debe presuponer la de los números naturales (operaciones y propiedades formales), y la de los números naturales relativos, con su aritmética aditiva y multiplicativa. A ello le seguiría el abordaje de los números enteros vía método genético, en el ámbito algebraico de la resolución de ecuaciones en la que tales números se construyen y definen, a lo que se agrega su aritmética, basada en la que se desarrolla en NR. Como dato adicional, la resolución de ecuaciones en Z puede servir también de herramienta para resolver los problemas propios del ámbito de NR.

Ahora podemos tener un cuadro más completo de cómo abordar el estudio de Z en la universidad. Ubicados en la fase crítica, habría que servirse tanto del método axiomático como del propuesto por Hankel. Y tomando en cuenta el método genético y los antecedentes fenomenológicos señalados, revisar las construcciones descritas en N y NR.

En conclusión, ¿estamos de acuerdo en incorporar todos estos aportes en nuestra enseñanza de Z en el nivel de pregrado, dentro de la formación matemática de nuestros futuros docentes de la especialidad?

6.2. El contenido de los números racionales

Al igual que en el caso de Z, el estudio de Q se plantea habitualmente en la universidad desde la perspectiva crítica-axiomática. Los elementos del conjunto, los números racionales, son clases de equivalencia formadas por pares ordenados de números enteros (a, b), $b \neq 0$, que verifican la relación de equivalencia R: (a, b) R $(c, d) \Leftrightarrow axd = b \times c$. La suma se define también axiomáticamente: $(a, b) + (c, d) = (a \times d + b \times c, b \times d)$, e igualmente la multiplicación: $(a, b) \times (c, d) = (a \times c, b \times d)$.

Indudablemente, no puede ser esta la manera de introducir el estudio de los números racionales en el liceo. Debemos, pues, recurrir a los planteamientos correspondientes al *método genético*. De nuevo y al igual que con los números enteros, buscamos el ámbito algebraico de la resolución de ecuaciones reducibles al tipo $ax = c$, a y $c \in$ Z, $a \neq 0$. Los distintos valores de la incógnita –positivos, negativos y nulo- definen a los correspondientes números racionales *c*/*a*, que pueden también representarse como puntos en la recta numérica, dotados de un orden y con la propiedad de constituir un conjunto denso.

Al entrar en las operaciones con tales números observamos que habitualmente se efectúan siguiendo las reglas operativas de las fracciones, siendo así que se trata de objetos matemáticos diversos. Esta práctica se extiende a las operaciones con polinomios, con ecuaciones, matrices, entre otros., en las que aparecen números racionales. Por ejemplo, en el caso de la suma de dos números racionales suele procederse con frecuencia mediante el recurso de hallar el mínimo múltiplo común de los *denominadores* y seguir por esa vía, artificio no contemplado en la visión axiomática de Q estudiada en la universidad. ¿Es válido proceder de esa manera en Q?

La respuesta es afirmativa y se justifica en que el conjunto de las fracciones construido en el ámbito de la fase ingenua, es un antecedente fenomenológico de Q, "*la fuente fenomenológica de los números racionales –una fuente que nunca se seca*" (Freudenthal, 1983: 134). *Y esto es válido tanto si Q se construye por el método genético como por el axiomático*. Pero ahondemos algo más en este tema con el fin de desentrañar las relaciones que expresan una antecedencia fenomenológica y distinguirlas de aquellas que no lo hacen.

Vergnaud (1983, 1988) introduce la noción de *campo conceptual* como la de un espacio de situaciones-problemas, cuyo tratamiento implica conceptos y procedimientos de diversos tipos, en estrecha conexión. Por ejemplo, en el campo conceptual multiplicativo, no resulta razonable estudiar separadamente la adquisición de la multiplicación, la división, fracciones, razones, números racionales, funciones lineales y multilineales, espacios vectoriales y análisis dimensional, pues las relaciones encontradas por los alumnos en problemas de multiplicación y de división se hacen presentes en todos esos conceptos.

Lo anterior se debe a la aparición y consolidación de *invariantes operacionales*, que se construyen cuando el alumno desarrolla comportamientos y procedimientos apropiados, cualquiera que sea el significante presentado, es decir, cualquiera que sea la representación del concepto (gráfico, numérico, algebraico, geométrico...). Y también cuando el mismo significante es utilizado por diversos conceptos del mismo campo (polisemia del símbolo).

Con referencia a este último aspecto, si por ejemplo, observamos la representación *a*/*b*, *a* y *b* є N, $b \neq 0$, hallamos cuatro posibles interpretaciones del símbolo: como fracción, como razón, como cociente, y como número racional (Andonegui, 2006). Como fracción expresa la relación entre los valores de una parte y del todo del que proviene la parte. Como razón, la relación entre los valores dedos magnitudes cualesquiera, de la misma o diferente naturaleza, de las cuales ninguna es parte de la otra. Como indicador de la división de dos cantidades puede referirse a cualquier situación real organizada y resuelta por esa operación aritmética y a la necesidad de calcular el cociente y el resto. Finalmente, como número racional, hace referencia a un elemento de Q y, como tal, no se refiere a la medida de magnitudes que se relacionan como una parte con un todo (caso de las fracciones), o como dos magnitudes entre sí (caso de las razones). Es algo abstracto, sin referentes, propio de la matemática pura. Y puede ser negativo, situación que no se da en los casos anteriores.

En esta misma línea, Kieren (1976) habla de cinco subconstructos necesarios (sin mencionar explícitamente el término fracción) para desarrollar el concepto de número racional: parte-todo, medida, cociente, razón, y operador multiplicativo. Además, Kieren (1988) elabora una red ideal de relaciones entre tales subconstructos que desemboca en el concepto de número racional. Por su parte, Lesh, Post y Behr (1988) establecen el concepto de fracción al diferenciarlo de los conceptos de rata, razón, y cociente. Freudenthal (1983), además de sugerir que las fracciones son la fuente fenomenológica del número racional, menciona tres aspectos fenomenológicos de la fracción: como fracturador (quebrado, parte-todo), comparador, y operador.

Frente a esta variedad de elementos, todos ellos pertenecientes al mismo campo conceptual, y para distinguirlos, podemos acudir a la referencia histórico-constructiva de las fracciones con el fin de captar que el significado cultural primigenio de la fracción viene dado por la expresión numérica de la relación entre una parte y el todo. Este requerimiento cultural *números que representan fracciones* aparece plasmado en símbolos abstractos ya desde las culturas babilónica y egipcia.

Ahora bien, la idea de que las fracciones eran realmente números se consolidó a partir del Renacimiento. "*En 1585, Simon Stevin da la idea de una solución que imperará durante tres siglos, al proponer una nueva definición: número es aquello mediante lo que se explica la magnitud de alguna cosa"* (Ferreirós, 1998, p. 8). Definición que Newton clarifica en 1707, en su *Arithmetica Universalis: "Entendemos por número no tanto una multitud de unidades cuanto la razón entre una cantidad abstracta cualquiera y otra del mismo género que se toma por unidad*" (citado en Ferreirós, 1998, p. 8).

De esta manera, una fracción como 2/3 que inicialmente sólo representaba la relación entre la magnitud de la parte y la del todo del que procedía, se interpreta también como un número que mide el *número de veces que el todo está contenido en la parte, considerado el todo como la unidad.* Así, las fracciones, como los números naturales y hasta los propios números irracionales, se convierten en *números-medida* de magnitudes comparadas con la unidad. Por consiguiente, todos ellos pueden representarse como puntos de la recta numérica.

Hechas todas estas distinciones, nos resta justificar la antecedencia fenomenológica de las fracciones con respecto a los números racionales. Esto significa, en primer lugar, reconocer su no-identidad. Las fracciones aparecen, como hemos indicado, para dar respuesta a situaciones que requieren establecer la relación entre la parte y un todo de referencia. En cambio, el ámbito de aparición de los números racionales es posterior y diferente. En el siglo XIX la matemática experimentó numerosos y profundos cambios; se buscó, entre otras cosas, darle un fundamento abstracto a los números, que no dependiera de referentes externos. Y en este sentido, se requerían números de la forma a/b, pero sin la referencia a magnitudes medibles ni a la relación entre las magnitudes de la parte y del todo de algo. De ahí el recurso, primero al ámbito algebraico de las ecuaciones y, posterior y definitivamente, a la matemática pura, a la teoría de conjuntos, a seguir un desarrollo abstracto y desde adentro (Ferreirós, 1998). Así se construyeron los números racionales que, como se ve, tienen una naturaleza distinta a la de las fracciones.

Ahora bien, por su expresión numérica y la manera de hacer operaciones con ellas, las fracciones sí pueden considerarse, no sólo como el antecedente histórico, sino también como la *fuente fenomenológica de los números racionales*, es decir, como objetos matemáticos que –sin estar definidos como números racionales– se presentan y comportan como tales (Freudenthal, 1983).

En cuanto a las razones, luce desacertado ubicarlas, junto con la fracción, como un subconstructo del número racional (Kieren, 1988), como uno de los antecedentes de este último en la red conceptual correspondiente. El hecho de que la razón pertenezca al campo conceptual multiplicativo no tiene esa implicación; por ejemplo, las razones no pueden operarse (sumarse, etc.) como las fracciones ni como los números racionales. Además, el concepto matemático disciplinar –del ámbito del *savoir savant*– al que hace referencia la razón, entendida fundamentalmente como elemento integrador de una proporción, es el concepto de función lineal de la forma $f(x) = mx$. Es decir, la razón puede considerarse como un antecedente fenomenológico de la función lineal, pero no del número racional.

En conclusión, ¿estamos de acuerdo en incorporar el método genético y todo este análisis fenomenológico en nuestra enseñanza de Q en el nivel de pregrado, dentro de la formación matemática de nuestros futuros docentes de la especialidad?

7. Conclusiones

- La matemática que se enseña a quienes van a ser profesionales de su enseñanza tiene que poseer algún rasgo distintivo en comparación con la que necesitan y aprenden otros futuros profesionales.
- La perspectiva fenomenológica, con su modo de ver la matemática como una actividad marcada por los procesos de matematización horizontal y vertical, junto con la necesidad de efectuar el análisis fenomenológico de cada contenido matemático, se presenta como una vía para alcanzar ese carácter peculiar que debe poseer la matemática a aprender por parte de los docentes de la especialidad durante su formación de pregrado.
- Lo anterior implica que se tome en cuenta en la universidad, en la actividad de aprender la matemática que se presenta en sus fases crítica y operativa-formal, la matemática que se halla en las respectivas fases anteriores, y que se comprenda la relación que existe entre todas ellas.
- Estos lineamientos deberían plasmarse en los diseños curriculares de las instituciones que forman docentes de matemática para los niveles educativos primario y secundario.
- El planteamiento de centrar la formación en la adquisición y desarrollo de competencias no exime –sino todo lo contrario– de la necesaria tarea previa de estudiar el contenido matemático que se vaya a construir con nuestros educandos –sea en el nivel universitario, secundario o primario–, con el fin de captar, precisamente, el abanico más completo posible de competencias cuyo desarrollo queremos proponer.

Referencias bibliográficas

Andonegui, M. (2005) *La naturaleza de los saberes matemáticos considerados en los niveles de la Educación Inicial y Básica*. Equisangulo. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, Número 2, Vol. 1. Disponible en: http://www.actualizaciondocente.ula.ve/equisangulo/index.html

____________. (2006) *Fracciones I. Concepto y representación*. Caracas: Federación Internacional Fe y Alegría.

____________. (2007) *La praxis de la Didáctica de la Matemática. Tesis doctoral*. Barquisimeto: Proyecto Interinstitucional de Educación, UCLA, UNEXPO, UPEL Instituto Pedagógico.

____________. (2010a) *Dimensiones de la práctica de la educación matemática*. Maracaibo: Fe y Alegría.

____________. (2010b) *Filosofía de la Educación Matemática en la universidad*. En Actas VII Congreso de Investigación. Valencia: Universidad de Carabobo, Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997) *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Barcelona: ICE-Horsori.

Durán, A. (2001) *El valor estético de las Matemáticas.* Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 4(1), 329-354.

Ferreirós, J. (1998) *Introducción*. En: R. Dedekind, ¿Qué son y para qué sirven los números? (pp. 5-75). Madrid: Alianza.

Freudenthal, H. (1983) *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

_____________. (1991) *Revisiting Mathematics Education. China lectures.* Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Glaeser, G. (1981) *Epistémologie des nombres relatif*s. Recherches en Didactique des Mathématiques, 39 (2), 303-346.

Goffree, F. (2000) *Principios y paradigmas de una 'educación matemática realista*. En: N. Gorgorió, J. Deulofeu& A. Bishop (Coords.), Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional(pp. 151-167). Barcelona: Graó.

González Marí, J. L. (1995) *El campo conceptual de los números naturales relativos*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada. Disponible en: http://www.jlgonzalezmari.com/libros-y-cap%C3%ADtulos-de-libros-1/

González Marí, J. L.; Rico, L. y Gallardo, J. (2009) *Diversidad estructural y semiótica en el proceso didáctico de ampliación de los naturales a los enteros: un estudio sobre comprensión en el campo de la relatividad aditiv*a. Electronic Journal of Research in Educational Psychology, No 17, Vol 7 (1), 309-340.

Gravemeijer, K. (1994) *Developing realistic mathematics education*. Utrecht: Freudenthal Institute.

Guzmán, M. de (1993) *Enseñanza de las ciencias y la matemática. Tendencias e innovaciones*. Madrid: OEI. Disponible en: http://www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm

Henley, A. T. (1999) *The history of negative numbers*. London: South Bank University.

Hilbert, D. (1993) *Fundamentos de las Matemáticas* (recopilación), Colección MATHEMA. México: UNAM, Facultad de Ciencias.

Kasner, E. & Newman, J. (1987) M*atemáticas e imaginación (II)*. Barcelona: Salvat.

Kieren, T. (1976) *On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers*. En R. Lesh (Ed.), Number and measurement (pp.101-144). Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC.

________. (1988) *Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development*. En J. Hiebert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (pp. 162-181). Reston, Virginia: NCTM.

Koestler, A. (1986) *Los sonámbulos*. Barcelona: Salvat.

Le Lionnais, F. (1962) *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*. Buenos Aires: Eudeba.

Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1988) *Proportional reasoning*. En J. Hiebert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (pp. 93-118). Reston, Virginia: NCTM.

Lorenzo, J. de (1977) *La matemática y el problema de su historia*. Madrid: Tecnos.

___________ (1998) *La matemática: de sus fundamentos y crisis*. Madrid: Tecnos.

Puig, L. (1997) *Análisis fenomenológico*. En L. Rico (Coord.), La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 61-94). Barcelona: ICE-Horsori.

Steen, L. A. (1998) *La enseñanza agradable de las Matemáticas*. México: Limusa.

Stewart, I. (1998) *Cambio. En L. A. Steen (Ed.), La enseñanza agradable de las Matemáticas* (pp. 193-228). México: Limusa.

Streefland, L. (2003) *Learning from history for teaching in the future*. Educational Studies in Mathematics, 54,37–62.

Toledo, U. (2007) *Realidades múltiples y mundos sociales. Introducción a la socio-fenomenología*. Cinta Moebio, 30, 211-244.

Treffers, A. (1987) *Three dimensions. A model of goal and theory description in Mathematics Education: The Wiskobas Project*. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Tucker, A. & Bailey, H. (1974) *Topología*. En M. Kline (Ed.), Matemáticas en el mundo moderno (pp. 151-158). Madrid: Blume.

Vergnaud, G. (1983) *Multiplicative structures*. En R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of mathematics concepts and processes (pp. 127-174). New York: Academic Press.

___________. (1988) *Multiplicative structures*. En J. Hiebert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (pp. 141-161). Reston, Virginia: NCTM.